УДК 514.75

А. В. Кулешов

ФУНДАМЕНТАЛЬНО-ГРУППОВЫЕ СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫМ ОСНАЩЕНИЕМ СЕМЕЙСТВА ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Статья продолжает цикл работ, посвященных исследованию связностей на произвольном гладком семействе центрированных плоскостей в проективном пространстве. Показано, что композиционное оснащение такого семейства индуцирует трехпараметрическую связку пучков фундаментально-групповых связностей. Из каждого пучка выделено по одной индуцированной связности. Приведены условия совпадения полученных связностей, а также дана геометрическая интерпретация линейных подсвязностей.

This paper continues the cycle of works dealing with connections on a smooth family of centered planes in projective space. It is shown that composite clothing of such a family induces three-parameter bunch of bundles of fundamental-group connections. One induced connection is allocated from each of this bundles. Coincidence conditions of the received connections and geometrical interpretation of the linear sub connections is given.

Ключевые слова: проективное пространство, семейство центрированных плоскостей, фундаментально-групповая связность, пучок связностей, композиционное оснащение, центральное проектирование, метод Картана — Лаптева.

Key words: projective space, family of centered planes, fundamental-group connection, bundle of connections, composite equipment, central projection, Cartan — Laptev's method.

Введение

Изучение связностей в главных расслоениях — одно из важных направлений в современной дифференциальной геометрии. Фундаментально-групповые связности, ассоциированные с семействами фигур в проективном пространстве, изучались Ю. И. Шевченко, К. В. Поляковой, О. О. Беловой, О. М. Омельян и др. Ими получены определенные результаты для случаев поверхности, распределения и грассманоподобного многообразия (см., напр., [1; 2; 8; 10]). В силу того, что каждое из этих многообразий можно рассматривать как семейство центрированных плоскостей, имеющее определенный вид, особую актуальность приобретает переход к изучению произвольного гладкого семейства таких фигур. Это дает возможность:

1) объяснить наблюдающиеся случаи совпадения результатов, независимо полученных для различных семейств;

2) обобщить полученные ранее результаты для конкретных семейств на более широкие классы семейств центрированных плоскостей;

3) получить новые результаты, ранее не встречавшиеся в исследованиях, указанных выше.

Рассмотрению этих вопросов положено начало в работах [3; 5; 6; 11]. Данная статья имеет своей целью придать разрабатываемой теории законченный вид.

В исследовании используется метод Картана — Лаптева [4], основанный на исчислении внешних дифференциальных форм. При этом все рассмотрения носят локальный характер.

1. Уравнения семейства B_r центрированных плоскостей

Отнесем n-мерное вещественное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются деривационными формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I,\ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A,\ I, J, \ldots = \overline{1, n},$$

где форма θ играет роль множителя пропорциональности, а структурные формы ω^I, ω_J^I, ω_I проективной группы $GP(n)$ удовлетворяют уравнениям Картана [12, с. 121]

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ D\omega_I = \omega_I^K \wedge \omega_K,\ D\omega_K^I = \omega_K^J \wedge \omega_J^I + \omega^J \wedge (-\delta_K^I \omega_J - \delta_J^I \omega_K).$$

Центрированной m-мерной плоскостью L_m^* $(1 \leqslant m < n)$ проективного пространства P_n размерности n будем называть m-мерную плоскость L_m с выделенной на ней точкой (называемой центром плоскости). Гладкое r-мерное многообразие, образующим элементом которого является центрированная плоскость, назовем *семейством центрированных плоскостей* и будем обозначать B_r, где $1 \leqslant r < m(n-m)+n$ [3; 5; 6; 11].

Такое семейство можно рассматривать как образ произвольного r-мерного многообразия V_r при гладком регулярном отображении в пространство всех центрированных m-плоскостей $B(m, n)$ проективного пространства P_n. Многообразие V_r назовем *пространством параметров семейства* B_r.

Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$, помещая вершину A в центр плоскости L_m^*, а вершины A_a — на плоскость L_m^*. Система уравнений семейства B_r центрированных плоскостей L_m^* в параметрической форме имеет вид [5; 11]:

$$\omega^a = \Lambda_i^a \theta^i,\ \omega^\alpha = \Lambda_i^\alpha \theta^i,\ \omega_a^\alpha = \Lambda_{ai}^\alpha \theta^i,$$
$$a, b, \ldots = \overline{1, m};\ \alpha, \beta, \ldots = \overline{m+1, n};\ i, j, \ldots = \overline{1, r},$$

где формы Пфаффа θ^i являются структурными формами r-мерного гладкого многообразия V_r и удовлетворяют уравнениям $D\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i$, а совокупность функций $\Lambda = \{\Lambda_i^a, \Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha\}$ образует фундаментальный тензор многообразия B_r с тремя подтензорами Λ_i^α, $\{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_i^a\}$, $\{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha\}$.

С B_r ассоциировано главное расслоение $G_s(B_r)$ со структурными уравнениями, полученными в [11]. Его база — само многообразие B_r, типовой слой — s-членная подгруппа стационарности G_s плоскости L_m^*, где $s = n(n+1) - m(n-m)$. Расслоение $G_s(B_r)$ имеет два простейших и два простых фактор-расслоения [5]. По отношению к расслоению $G_s(B_r)$ формы θ^i — базовые, а ω_b^a, ω_β^α, ω_a, ω_α^a, ω_α — слоевые [4, с. 52].

2. Ассоциированные связности на многообразии B_r

Связность в расслоении — закон, устанавливающий изоморфизм между слоями над различными точками базы в зависимости от линий, соединяющих точки. Связность в главном расслоении P определяется гладким распределением П на P, удовлетворяющим условиям: 1) трансверсальности к слоям расслоения; 2) максимальности; 3) инвариантности относительно действия структурной группы данного расслоения [4, с. 79—80]. Фундаментально-групповая связность, по Г. Ф. Лаптеву, в главном расслоении $G_s(B_r)$ задается с помощью форм, которые аннулируются указанным распределением П:

$$\begin{gathered}\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{bi}^a\theta^i,\ \tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta i}^\alpha\theta^i,\ \tilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{ai}\theta^i; \\ \tilde{\omega}_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha i}^a\theta^i,\ \tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha i}\theta^i,\end{gathered} \tag{2.1}$$

причем компоненты объекта групповой связности

$$\Gamma = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{ai}, \Gamma_{\alpha i}^a, \Gamma_{\alpha i}\}$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям [11], полученным с использованием теоремы Картана — Лаптева [4, с. 81—83]:

$$\Delta\Gamma_{bi}^a + \omega_{bi}^a = \Gamma_{bij}^a\theta^j,\ \Delta\Gamma_{\beta i}^\alpha + \omega_{\beta i}^\alpha = \Gamma_{\beta ij}^\alpha\theta^j,\ \Delta\Gamma_{ai} + \Gamma_{ai}^b\omega_b + \omega_{ai} = \Gamma_{aij}\theta^j,$$

$$\Delta\Gamma_{\alpha i}^a - \Gamma_{bi}^a\omega_\alpha^b + \Gamma_{\alpha i}^\beta\omega_\beta^a + \omega_{\alpha i}^a = \Gamma_{\alpha ij}^a\theta^j,\ \Delta\Gamma_{\alpha i} + \Gamma_{\alpha i}^a\omega_a + \Gamma_{\alpha i}^\beta\omega_\beta - \Gamma_{ai}\omega_\alpha^a = \Gamma_{\alpha ij}\theta^j,$$

где формы ω_{bi}^a, $\omega_{\beta i}^\alpha$, ω_{ai}, $\omega_{\alpha i}^a$ являются линейными комбинациями слоевых форм с коэффициентами Λ_i^a, Λ_i^α, Λ_{ai}^α.

Замечание. Дифференциальный оператор Δ действует следующим образом, например, на компоненты Γ_{bi}^a: $\Delta\Gamma_{bi}^a = d\Gamma_{bi}^a + \Gamma_{bi}^c\omega_c^a - \Gamma_{ci}^a\omega_b^c - \Gamma_{bj}^a\theta_i^j$ — и удовлетворяет свойствам $\Delta(\Lambda + M) = \Delta\Lambda + \Delta M$, $\Delta(\Lambda M) = M\Delta\Lambda + \Lambda\Delta M$, $\Delta(\alpha\Lambda) = \alpha\Delta\Lambda$, где Λ и M — функции, $\alpha = \mathrm{const}$ [9].

Объект Γ содержит два простейших и два простых подобъекта:

1) Γ_{bi}^a — объект плоскостной линейной связности;

2) $\Gamma_{\beta i}^\alpha$ — объект нормальной линейной связности;

3) $\Gamma_1 = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}\}$ — объект центропроективной связности;

4) $\Gamma_2 = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{\alpha i}^a\}$ — объект аффинно-групповой связности.

3. Композиционное оснащение семейства B_r

Понятие оснащения состоит в присоединении к каждой фигуре семейства оснащающей фигуры. Чаще всего оснащениями пользуются для индуцирования связностей, когда те не возникают внутренним образом [10]. Композиционным оснащением (ср. [10, с. 83]) семейства B_r называется *присоединение к каждой плоскости* L_m^*:

1) $(n-m-1)$-плоскости C_{n-m-1}, не имеющей общих точек с L_m^* (аналог плоскости Э. Картана);

2) $(m-1)$-плоскости N_{m-1}, лежащей в L_m^* и не проходящей через ее центр A (аналог нормали 2-го рода А. П. Нордена).

Замечание. Композиционное оснащение выступает аналогом сильной нормализации, введенной А. П. Норденом для поверхности в проективном пространстве [7].

Оснащающие плоскости C_{n-m-1}, N_{m-1} определяются системами базисных точек

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha A, \; B_a = A_a + \lambda_a A, \tag{3.1}$$

где компоненты оснащающего квазитензора $\lambda = \{\lambda_a, \lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha\}$ удовлетворяют уравнениям [11]:

$$\Delta\lambda_a + \omega_a = \lambda_{ai}\theta^i; \tag{3.2}$$

$$\Delta\lambda_\alpha^a + \omega_\alpha^a = \lambda_{\alpha i}^a\theta^i; \tag{3.3}$$

$$\Delta\lambda_\alpha + \lambda_\alpha^a\omega_a + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha i}\theta^i. \tag{3.4}$$

Данные уравнения обеспечивают инвариантность плоскостей C_{n-m-1} и N_{m-1} при фиксации образующего элемента L_m^* семейства B_r. Плоскость N_{n-m}, натянутая на плоскость C_{n-m-1} и точку A, является аналогом нормали 1-го рода Нордена, порожденной плоскостью Картана, а плоскость P_{n-1}, натянутая на плоскости C_{n-m-1} и N_{m-1}, — аналогом гиперплоскости Бортолотти, натянутой на плоскость Картана и нормаль 2-го рода Нордена.

Обозначим $\lambda' = \{\lambda_{ai}, \lambda_{\alpha i}^a, \lambda_{\alpha i}\}$ объект из пфаффовых производных оснащающего квазитензора λ, тогда {λ, λ′} — продолженный оснащающий объект (ср. [10, с. 50]). Он образует геометрический объект лишь в совокупности с фундаментальным тензором семейства B_r. Дифференциалы базисных точек (3.1) оснащающих плоскостей имеют вид [6]

$$dB_\alpha = \theta B_\alpha + (\omega_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^a\omega_a^\beta + \lambda_\alpha\omega^\beta)B_\beta + (t_{\alpha i}^a B_a + t_{\alpha i}A)\theta^i; \tag{3.5}$$

$$dB_a = \theta B_a + (\omega_a^b + \lambda_a\omega^b)B_b + (t_{ai}^\alpha B_\alpha + t_{ai}A)\theta^i, \tag{3.6}$$

где совокупность величин

$$t_{\alpha i}^a = \lambda_{\alpha i}^a + \lambda_\alpha M_i^a - \lambda_\beta^a\lambda_\alpha^b\Lambda_{bi}^\beta, \; t_{\alpha i} = \lambda_{\alpha i} - \Lambda_{ai}^\beta\lambda_\alpha^a\lambda_\beta - \Lambda_i^\beta\lambda_\beta\lambda_\alpha - \lambda_a t_{\alpha i}^a; \tag{3.7}$$

$$t_{\alpha i}^a = \lambda_{\alpha i}^a + \lambda_\alpha M_i^a - \lambda_\beta^a\lambda_\alpha^b\Lambda_{bi}^\beta, \; t_{\alpha i} = \lambda_{\alpha i} - \Lambda_{ai}^\beta\lambda_\alpha^a\lambda_\beta - \Lambda_i^\beta\lambda_\beta\lambda_\alpha - \lambda_a t_{\alpha i}^a; \tag{3.8}$$

$$t_{ai}^\alpha = \Lambda_{ai}^\alpha + \lambda_a\Lambda_i^\alpha, \; t_{ai} = \lambda_{ai} - \Lambda_i^b\lambda_b\lambda_a - t_{ai}^\alpha\mu_\alpha \tag{3.9}$$

образует тензор $t=\{t^a_{\alpha i}, t_{\alpha i}, t^\alpha_{ai}, t_{ai}\}$, содержащий четыре простейших подтензора $t^a_{\alpha i}$, $t_{\alpha i}$, t^α_{ai} и t_{ai}; кроме того, $M^a_i=\Lambda^a_i-\Lambda^\beta_i\lambda^a_\beta$ — тензор, а $\mu_\alpha=\lambda_\alpha-\lambda^b_\alpha\lambda_b$.

Обращение тензора M^a_i в нуль характеризует такие оснащенные семейства B_r, у которых центры плоскостей $\overset{*}{L}_m$ смещаются вдоль соответствующих нормалей первого рода N_{n-m}, а обращение в нуль подтензора t^α_{ai} выделяет семейства B_r, у которых нормали N_{m-1} смещаются в соответствующих плоскостях $\overset{*}{L}_m$.

Случаи обращения в нуль остальных подтензоров тензора t геометрически характеризуются соответствующими специальными смещениями оснащающих плоскостей (см. табл.), при этом никаких ограничений на семейство B_r не накладывается. Например, условия $t_{\alpha i}=0$ равносильны смещению плоскости Картана C_{n-m-1} в гиперплоскости Бортолотти P_{n-1}, а вместе с обращением в нуль подтензора $t^a_{\alpha i}$ они обеспечивают неподвижность плоскости C_{n-m-1}.

Таким образом, вырождение тензора t ограничивает подвижность оснащающих плоскостей, поэтому назовем его тензором подвижности.

Классификация специальных типов композиционного оснащения для произвольного семейства B_r

№	Аналитическое условие	Геометрическая интерпретация
1	$t_{\alpha i}=0$	C_{n-m-1} смещается в P_{n-1}
2	$t^a_{\alpha i}=0$	C_{n-m-1} смещается в N_{n-m}
3	$t_{ai}=0$	N_{m-1} смещается в P_{n-1}
4	$t_{\alpha i}=0$, $t^a_{\alpha i}=0$	C_{n-m-1} неподвижна
5	$t_{\alpha i}=0$, $t_{ai}=0$	P_{n-1} неподвижна
6	$t^a_{\alpha i}=0$, $t_{ai}=0$	C_{n-m-1} смещается в N_{n-m}, N_{m-1} смещается в P_{n-1}
7	$t_{\alpha i}=0$, $t^a_{\alpha i}=0$, $t_{ai}=0$	C_{n-m-1} и P_{n-1} неподвижны, N_{m-1} смещается в P_{n-1}

4. Пучки индуцированных связностей

Внося формы связности (2.1) в уравнения (3.2—3.4), получим следующие равенства: $\nabla\lambda_a=\nabla_i\lambda_a\theta^i$, $\nabla\lambda^a_\alpha=\nabla_i\lambda^a_\alpha\theta^i$, $\nabla\lambda_\alpha=\nabla_i\lambda_\alpha\theta^i$, где в левых частях стоят ковариантные дифференциалы компонент оснащающего квазитензора λ относительно групповой связности Г (см. в [3; 5]), а в правых частях перед базисными формами — ковариантные производные

$$\nabla_i\lambda_a=\lambda_{ai}+\lambda_b\Gamma^b_{ai}-\Gamma_{ai}; \tag{4.1}$$

$$\nabla_i\lambda^a_\alpha=\lambda^a_{\alpha i}-\lambda^b_\alpha\Gamma^a_{bi}+\lambda^a_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i}-\Gamma^a_{\alpha i}; \tag{4.2}$$

$$\nabla_i\lambda_\alpha=\lambda_{\alpha i}-\lambda^a_\alpha\Gamma_{ai}+\lambda_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i}-\Gamma_{\alpha i}. \tag{4.3}$$

Эти ковариантные производные удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям по модулю форм θ^i [3]:

$$\Delta\nabla_i\lambda_a \equiv 0\,,\ \Delta\nabla_i\lambda_\alpha^a \equiv 0\,,\ \Delta\nabla_i\lambda_\alpha + \nabla_i\lambda_\alpha^a\omega_a \equiv 0\,. \tag{4.4}$$

Итак, совокупность ковариантных производных $\{\nabla_i\lambda_a, \nabla_i\lambda_\alpha^a, \nabla_i\lambda_\alpha\}$ компонент оснащающего квазитензора λ образует тензор ∇ λ, содержащий три подтензора: $\nabla_i\lambda_a$, $\nabla_i\lambda_\alpha^a$, $\{\nabla_i\lambda_\alpha^a, \nabla_i\lambda_\alpha\}$. Из сравнений (4.4) и уравнений (3.2) на компоненты λ_a следует, что величины

$$T_{\alpha i} = \nabla_i\lambda_\alpha - \lambda_a\nabla_i\lambda_\alpha^a \tag{4.5}$$

также образуют тензор, который можно назвать тензором линейных комбинаций ковариантных производных объекта $\{\lambda_\alpha, \lambda_\alpha^a\}$.

Зададим три вещественных числа ξ, η, ζ. Тогда равенства

$$\nabla_i\lambda_a = \xi t_{ai}\,,\ \nabla_i\lambda_\alpha^a = \eta t_{\alpha i}^a\,,\ T_{\alpha i} = \zeta t_{\alpha i} \tag{4.6}$$

являются инвариантными в силу тензорного характера всех входящих в них объектов. Подставляя в эти равенства соотношения (4.1—4.3) и (4.5), получим систему линейных уравнений относительно компонент Γ_{ai}, $\Gamma_{\alpha i}^a$, $\Gamma_{\alpha i}$ объекта фундаментально-групповой связности Г. Решая полученную систему, находим выражения этих величин через объекты плоскостной и нормальной линейных подсвязностей Γ_{bi}^a, $\Gamma_{\beta i}^\alpha$, оснащающий квазитензор $\lambda = \{\lambda_a, \lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha\}$ и тензор подвижности *t*:

$$\Gamma_{ai}(\xi) = \lambda_{ai} + \lambda_b\Gamma_{ai}^b - \xi t_{ai}\,; \tag{4.7}$$

$$\Gamma_{\alpha i}^a(\eta) = \lambda_{\alpha i}^a - \lambda_\alpha^b\Gamma_{bi}^a + \lambda_\beta^a\Gamma_{\alpha i}^\beta - \eta t_{\alpha i}^a\,; \tag{4.8}$$

$$\Gamma_{\alpha i}(\xi,\eta,\zeta) = \lambda_{\alpha i} + \lambda_\beta\Gamma_{\alpha i}^\beta - \lambda_\alpha^a\Gamma_{ai}(\xi) - \zeta t_{\alpha i} - \lambda_a\eta t_{\alpha i}^a\,. \tag{4.9}$$

В свою очередь, компоненты тензора подвижности выражаются через λ, λ′ и Λ по формулам (3.7—3.9). Итак, объект связности Г охватывается подобъектами Γ_{bi}^a, $\Gamma_{\beta i}^\alpha$, фундаментальным тензором Λ, оснащающим квазитензором λ и его пфаффовыми производными λ′. Также говорят, что связность Г сводится к подсвязности $\{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{\beta i}^\alpha\}$ с помощью продолженного оснащения (ср. [10, с. 51]). При этом, в зависимости от конкретных значений параметров ξ, η, ζ, выделяется соответствующий пучок индуцированных связностей, кратко обозначаемый Г=Г(ξ, η, ζ). Параметры ξ, η, ζ назовем *параметрами связки*, а компоненты Γ_{bi}^a, $\Gamma_{\beta i}^\alpha$ — *параметрами многопараметрических пучков*. Таким образом, справедлива

Теорема 4.1. *Продолженное композиционное оснащение семейства B_r индуцирует в главном расслоении $G_s(B_r)$ трехпараметрическую связку пучков фундаментально-групповых связностей*

$$\Gamma(\xi,\eta,\zeta) = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{ai}(\xi), \Gamma_{\alpha i}^a(\eta), \Gamma_{\alpha i}(\xi,\eta,\zeta)\}\,.$$

Замечание. Если в охвате присутствуют пфаффовы производные □′ оснащающего объекта λ, то обычно говорят об индуцировании связности или пучка связностей с помощью оснащения.

Например, пучок связностей Г(0, 0, 0) выделяется, если потребовать $\nabla_i\lambda_\alpha^a = 0$, $\nabla_i\lambda_a = 0$, $T_{\alpha i} = 0$. Тогда

$$\Gamma_{ai}(0) = \lambda_{ai} + \lambda_b\Gamma_{ai}^b,$$
$$\Gamma_{\alpha i}^a(0) = \lambda_{\alpha i}^a - \lambda_\alpha^b\Gamma_{bi}^a + \lambda_\beta^a\Gamma_{\alpha i}^\beta,$$
$$\Gamma_{\alpha i}(0,\ 0,\ 0) = \lambda_{\alpha i} + \lambda_\beta\Gamma_{\alpha i}^\beta - \lambda_\alpha^a\Gamma_{ai}.$$

Отметим, что компоненты тензора Λ не присутствуют в правых частях полученных равенств.

Выделим другой пучок Г(1, 1, 1): $\nabla_i\lambda_\alpha^a = t_{\alpha i}^a$, $\nabla_i\lambda_a = t_{ai}$, $T_{\alpha i} = t_{\alpha i}$.

Подставляя выражения (3.7—3.9) компонент тензора подвижности в формулы (4.7—4.9), получим следующие равенства для пучка Г(1, 1, 1):

$$\Gamma_{ai}(1) = \lambda_b\Gamma_{ai}^b + \Lambda_i^b\lambda_b\lambda_a + t_{ai}^\alpha\mu_\alpha; \tag{4.10}$$
$$\Gamma_{\alpha i}^a(1) = \lambda_\beta^a\Gamma_{\alpha i}^\beta - \lambda_\alpha^b\Gamma_{bi}^a + \lambda_\alpha M_i^a + \lambda_\beta^a\lambda_\alpha^b\Lambda_{bi}^\beta; \tag{4.11}$$
$$\Gamma_{\alpha i}(1,1,1) = \lambda_\beta\Gamma_{\alpha i}^\beta - \lambda_\alpha^a\Gamma_{ai} + \Lambda_{ai}^\beta\lambda_\alpha^a\lambda_\beta + \Lambda_i^\beta\lambda_\beta\lambda_\alpha. \tag{4.12}$$

Видно, что в правых частях отсутствуют пфаффовы производные λ′ оснащающего квазитензора λ. Таким образом, пучки связностей Г(0, 0, 0) и Г(1, 1, 1) занимают особое место среди всего трехпараметрического семейства.

Равенства (4.7) сводят центропроективную связность $\Gamma_1 = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}\}$ к линейной подсвязности Γ_{bi}^a, то есть выделяют некоторый пучок $\Gamma_1(\xi) = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}(\xi)\}$. Равенства (4.8) сводят аффинно-групповую связность $\Gamma_2 = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{\alpha i}^a\}$ к линейным подсвязностям Γ_{bi}^a и $\Gamma_{\beta i}^\alpha$, то есть выделяют пучок $\Gamma_2(\eta) = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{\alpha i}^a(\eta)\}$.

Замечание. В работе [5] были выделены шесть пучков индуцированных фундаментально-групповых связностей:

Г(0, 0, 0), Г(0, 0, 1), Г(1, 0, 1), Г(0, 1, 0), Г(0, 1, 1), Г(1, 1, 1).

Их аналоги на распределении плоскостей получены в работе [8].

5. Индуцированные связности

Из каждого полученного пучка Г=Г(ξ, η, ζ) можно выделить по одной индуцированной связности $\overset{0}{\Gamma}(\xi,\eta,\zeta)$ при помощи подстановки в формулы (4.7—4.9) следующих охватов компонент Γ_{bi}^a и $\Gamma_{\beta i}^\alpha$ [11]:

$$\overset{0}{\Gamma}{}_{bi}^a = \Lambda_{bi}^\alpha\lambda_\alpha^a - \delta_b^a\Lambda_i^\alpha\lambda_\alpha + M_i^c(\delta_b^a\lambda_c + \delta_c^a\lambda_b); \tag{5.1}$$
$$\overset{0}{\Gamma}{}_{\beta i}^\alpha = -\Lambda_{ai}^\alpha\lambda_\beta^a - \Lambda_i^\alpha\lambda_\beta + \delta_\beta^\alpha(M_i^a\lambda_a - \Lambda_i^\gamma\lambda_\gamma). \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. *Продолженное композиционное оснащение семейства B_r индуцирует в главном расслоении $G_s(B_r)$ трехпараметрическую связку фундаментально-групповых связностей.*

В общем случае формулы охватов для компонент объектов связностей содержат: 1) компоненты фундаментального тензора Λ; 2) компоненты оснащающего квазитензора λ; 3) их пфаффовы производные λ'. Значит, связность индуцируется продолженным композиционным оснащением семейства B_r. При этом в формулах охватов (4.7—4.9), (5.1) и (5.2) для $\overset{0}{\Gamma}(1,1,1)$ пфаффовы производные λ' отсутствуют. Следовательно, данная связность особенна тем, что индуцирована самим композиционным оснащением без привлечения продолженного оснащающего объекта.

Замечание. Выражения для компонент объектов связности $\overset{0}{\Gamma}(0,0,0)$ и $\overset{0}{\Gamma}(1,1,1)$ впервые были получены в работах [3] и [11].

Из равенств (4.6) и таблицы (см. с. 143) вытекают следующие теоремы.

Теорема 5.2. *Смещение нормали 2-го рода N_{m-1} в гиперплоскости Бортолотти P_{n-1} влечет совпадение следующих связностей:*

$$\overset{0}{\Gamma}_1(\xi_1)=\overset{0}{\Gamma}_1(\xi_2),\ \overset{0}{\Gamma}(\xi_1,\eta,\zeta)=\overset{0}{\Gamma}(\xi_2,\eta,\zeta),\ \xi_1\neq\xi_2,\ \forall\ \eta,\zeta.$$

Теорема 5.3. *Смещение плоскости Картана C_{n-m-1} в нормали 1-го рода N_{n-m} влечет совпадение следующих связностей*:

$$\overset{0}{\Gamma}_2(\eta_1)=\overset{0}{\Gamma}_2(\eta_2),\ \overset{0}{\Gamma}(\xi,\eta_1,\zeta)=\overset{0}{\Gamma}(\xi,\eta_2,\zeta),\ \eta_1\neq\eta_2,\ \forall\ \xi,\zeta.$$

Теорема 5.4. *Для совпадения двух связностей вида $\overset{0}{\Gamma}(\xi,\eta,\zeta_1)$ и $\overset{0}{\Gamma}(\xi,\eta,\zeta_2)$, где $\zeta_1\neq\zeta_2$, а ξ и η — любые числа, достаточно смещения плоскости Картана C_{n-m-1} в гиперплоскости Бортолотти P_{n-1}.*

Эти теоремы позволяют находить достаточные условия совпадения любых двух заданных связностей из трехпараметрической связки.

Замечание. Связности на поверхности S_m $(1\leqslant m<n)$, рассматриваемой как семейство касательных плоскостей, исследовались в работах [9; 10]. При этом в [10] рассматриваются связности, аналоги которых для семейства B_r имеют вид $\overset{0}{\Gamma}(0,0,0)$, $\overset{0}{\Gamma}(1,1,1)$, $\overset{0}{\Gamma}(0,1,0)$ [10, с. 100], в [9] — связности $\overset{0}{\Gamma}(0,0,0)$, $\overset{0}{\Gamma}(1,1,1)$, $\overset{0}{\Gamma}(0,0,1)$. В статьях [1; 2] изучен другой случай семейства B_r — грассманоподобное многообразие $Gr^*(m,n)$ центрированных плоскостей, имеющее размерность $r=(n-m)(m+1)$. В этих работах исследуются связности $\overset{0}{\Gamma}(0,0,0)$ и $\overset{0}{\Gamma}(1,1,1)$.

6. Интерпретация плоскостной и нормальной линейных связностей при помощи центральных проектирований

Внесем $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^a_b=\omega^a_b-\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}\theta^i$, $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^\alpha_\beta=\omega^\alpha_\beta-\overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}\theta^i$ в формулы (3.5) и (3.6):

$$dB_\alpha=(\theta+(M^c_i\lambda_c-\Lambda^\beta_i\lambda_\beta)\theta^i)B_\alpha+\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^\beta_\alpha B_\beta+(t^a_{\alpha i}B_a+t_{\alpha i}A)\theta^i,$$

$$dB_a=(\theta+(M^c_i\lambda_c-\Lambda^\beta_i\lambda_\beta)\theta^i)B_a+\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^b_a B_b+(t^\alpha_{ai}B_\alpha+t_{ai}A)\theta^i.$$

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 6.1. *Индуцированная плоскостная линейная связность* $\overset{0}{\Gamma}{}^{a}_{bi}$ *характеризуется проекцией на нормаль 2-го рода* N_{m-1} *смежной с ней нормали* $N_{m-1}+dN_{m-1}$ *из центра — нормали 1-го рода* N_{n-m}.

Теорема 6.2. *Индуцированная нормальная линейная связность* $\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta i}$ *интерпретируется проекцией на плоскость Картана* C_{n-m-1} *смежной с ней плоскости* $C_{n-m-1}+dC_{n-m-1}$ *из центра — плоскости* L_m.

Список литературы

1. *Белова О. О.* Геометрическая характеристика индуцированных связностей грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 39. Калининград, 2008. С. 13—18.
2. *Белова О. О.* Связность 2-го типа в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Там же. Вып. 38. 2007. С. 6—12.
3. *Бондаренко Е. В.* Связности на многообразии центрированных плоскостей в проективном пространстве // Там же. Вып. 31. 2000. С. 12—16.
4. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. М, 1979. Т. 9. С. 5—247.
5. *Кулешов А. В.* Шесть типов индуцированной групповой связности на семействе центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 40. Калининград, 2009. С. 72—84.
6. *Кулешов А. В.* О совпадении и интерпретации связностей, индуцированных на семействе центрированных плоскостей // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. 2009. Вып. 10. С. 112—119.
7. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.
8. *Омельян О. М.* Классификация пучков связностей, индуцированных композиционным оснащением распределения плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 37. Калининград, 2006. С. 119—127.
9. *Полякова К. В.* Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14, №2. С. 129—177.
10. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.
11. *Шевченко Ю. И.* Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 9. Калининград, 1978. С. 124—133.
12. *Cartan E.* Lecons sur la theorie des espaces a connexion projective. P., 1937.

Об авторе

Артур Владимирович Кулешов — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: arturkuleshov@yandex.ru

About author

Artur Kuleshov — PhD student, I. Kant Federal University, Kaliningrad.

E-mail: arturkuleshov@yandex.ru